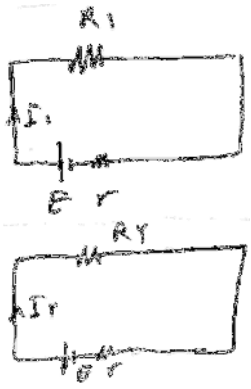
۱-



$$I_۱=\frac{E}{R_۱+r}\Rightarrow P_{R_۱}=I_۱^۲R_۱=E^۲\left(\frac{R_۱}{(R_۱+r)^۲}\right)$$

$$I_۲=\frac{E}{R_۲+r}\Rightarrow P_{R_۲}=I_۲^۲R_۲=E^۲\left(\frac{R_۲}{(R_۲+r)^۲}\right)$$

$$P_{R_۱}=P_{R_۲}$$

$$\frac{R_۱}{(R_۱+r)^۲}=\frac{R_۲}{(R_۲+r)^۲}\Rightarrow \boxed{r=\sqrt{R_۱R_۲}}$$

۲-

$$I_۱=\frac{E}{R_۱+r}=\frac{E}{۲۲}\Rightarrow V_۱=E-I_۱r=E-۲\times\frac{E}{۲۲}=E-\frac{E}{۱۱}=\frac{۱۰E}{۱۱}$$

$$I_۲=\frac{E}{R_۲+r}=\frac{E}{R_۲+۲}\Rightarrow V_۲=\frac{۱}{۲}V_۱=\frac{۵E}{۱۱}=E-I_۲r=E\left(\frac{E}{R_۲+۲}\right)\times۲$$

$$\frac{۵}{۱۱}=۱-\frac{۲}{R_۲+۲}\Rightarrow\frac{۲}{R_۲+۲}=\frac{۶}{۱۱}\Rightarrow ۶R_۲=۱۰\Rightarrow\boxed{R_۲=\frac{۵}{۳}}$$

۳- بیشترین توان تولیدی از یک مولد در حالتی رخ می‌دهد که $R=r$

$$\left.\begin{array}{l}P_{max}=I^۲R=\dfrac{E^۲}{۴r}\\ I=\dfrac{E}{R+r}=\dfrac{E}{۲r}\\ R=r\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{با توجّه به نمودار}}\left.\begin{array}{l}P_{max}=\dfrac{E^۲}{۴r}=۵\\ I=\dfrac{E}{۲r}=۴\end{array}\right\}\Rightarrow E=۲/۵(V)$$

۴- ابتدا از رابطهٔ $P=RI^۲$، جریان در مدار تک حلقه را حساب می‌کنیم و سپس نیروی محرکهٔ $\varepsilon_۱$ را به دست می‌آوریم و در نهایت توان تولیدی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$P_۱=R_۱I^۲\xrightarrow[P_۱=۳۶W]{R_۱=۹\Omega}۳۶=۹\times I^۲\Rightarrow I=۲A$$

با توجّه به جهت جریان مدار، $\varepsilon_۱>\varepsilon_۲$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

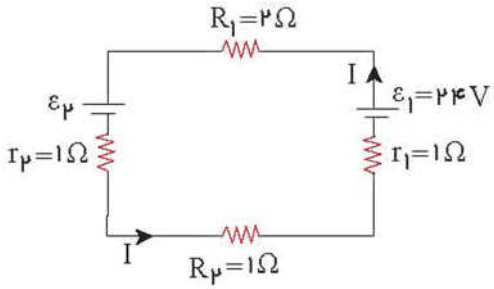
$$I=\frac{\varepsilon_۱-\varepsilon_۲}{R_۱+R_۲+R_۳+r_۱+r_۲}\Rightarrow ۲=\frac{\varepsilon_۱-۶}{۹+۱+۲+۱+۲}\Rightarrow\varepsilon_۱=۳۶V$$

چون مولد $\varepsilon_۱$ در جهت جریان است. توان تولیدی آن برابر است با:

$$P_{\text{تولیدی}}=\varepsilon_۱I\xrightarrow[I=۲A]{\varepsilon_۱=۳۶V}P_{\text{تولیدی}}=۳۶\times۲\Rightarrow P_{\text{تولیدی}}=۷۲W$$

۵- تذکّر مهم: با توجّه به اینکه در این سؤال توان ورودی مولد (۲) داده شده است، پس مولد (۱) محرکه و مولد (۲) ضد محرکه (مصرف‌کننده) خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$I=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_1+R_2+r_1+r_2}\Rightarrow I=\frac{24-\varepsilon_2}{2+1+1+1}=\frac{24-\varepsilon_2}{5}\ (1)$$



توان ورودی مولد ε_2 برابر است با:

$$P=VI\Rightarrow P_{\text{ورودی}}=(\varepsilon_2+Ir_2)I$$

توان ورودی مولد ε_2، ۲ برابر توان مصرفی مقاومت ۲ اهمی است.

$$P_1=R_1I^2=2I^2$$

$$P_{\text{ورودی}}=2P_1\Rightarrow(\varepsilon_2+Ir_2)I=4I^2\Rightarrow\varepsilon_2+I=4I\Rightarrow\varepsilon_2=3I$$

$$(1)\rightarrow\varepsilon_2=3\times\frac{24-\varepsilon_2}{5}\Rightarrow5\varepsilon_2=72-3\varepsilon_2\Rightarrow\varepsilon_2=\frac{72}{8}=9V\Rightarrow I=\frac{24-\varepsilon_2}{5}=\frac{24-9}{5}=3A$$

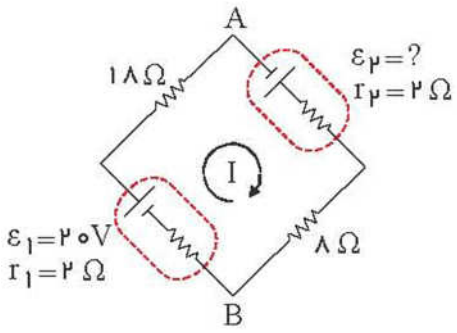
۶- نکته: چنانچه در یک مدار الکتریکی از شاخه‌ای از مدار جریان عبور نکند. این به آن معنی است که اختلاف پتانسیل دو سر آن شاخه صفر بوده و می‌توان آن شاخه را از مدار حذف کرد.

بنابراین در این سؤال چون از مقاومت ۳ اهمی جریان نمی‌گذرد، می‌توان آن را از مدار حذف کرد از طرفی چون اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ A و B صفر است، داریم:

$$V_B-Ir_1+\varepsilon_1-18I=V_A\Rightarrow-2I+20-18I=0\Rightarrow I=1A$$

$$V_B+8I+Ir_2-\varepsilon_2=V_A\Rightarrow+8\times1+2\times1-\varepsilon_2=0$$

$$\varepsilon_2=10V$$



۷- حالت اوّل:

$$I_1=\frac{\varepsilon}{R_1+r}=\frac{\varepsilon}{6+4}=\frac{\varepsilon}{10},P_{R_1}=I_1^2R_1=(\frac{\varepsilon}{10})^2(6)\qquad(1)$$

حالت دوم:

$$I_2=\frac{\varepsilon}{R_2+r}=\frac{\varepsilon}{R_2+4},P_{R_2}=I_2^2R_2=\frac{\varepsilon^2}{(R_2+4)^2}R_2=\frac{2}{3}P_{R_1}\qquad(2)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم (۲) به (۱)}}\frac{2}{3}=\frac{R_2}{(4+R_2)^2}\times\frac{100}{6}\Rightarrow\begin{cases}R_2=16\Omega\\R_2'=1\Omega\end{cases}\xrightarrow{\text{کمترین تغییر}}|6-1|=5\Omega$$

۸- مطابق اصل پایستگی انرژی توان خروجی باتری (۱) برابر با توان مصرفی مقاومت R و توان ورودی باتری (۲) است. چون $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ است، بنابراین باتری (۱) محرک است و باتری (۲) ضد محرکه. بنابراین توان خروجی باتری (۱) برابر $P_۱ = \varepsilon_۱ I - r_۱ I^۲$ و توان ورودی باتری (۲) برابر $P_۲ = \varepsilon_۲ I + r_۲ I^۲$ می‌باشد.

$$P(۱)\ \text{خروجی باتری} = P_R + P(۲)\ \text{ورودی باتری} \xrightarrow{\substack{P(۱)\ \text{خروجی باتری} = \varepsilon_۱ I - r_۱ I^۲ \\ P(۲)\ \text{ورودی باتری} = \varepsilon_۲ I - r_۲ I^۲}}$$

$$P_R = (\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲)I - (r_۱ + r_۲)I^۲ \xrightarrow[r_۱ = ۱\Omega\ ,\ r_۲ = ۲\Omega]{\varepsilon_۱ = ۱۲V,\ \varepsilon_۲ = ۶V} P_R = ۶I - ۳I^۲$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد توان مصرفی مقاومت R برحسب جریان عبوری از مدار به صورت یک سهمی است که تقعر سهمی به سمت پایین می‌باشد، بنابراین جریان را زمانی که توان بیشینه می‌شود به دست می‌آوریم. می‌دانیم x رأس سهمی در معادلهٔ درجه دو $ax^۲ + bx + C = ۰$ برابر است با:

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{۲a}$$

$$P_R = P_{max} \Rightarrow \vec{I} = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{۲(r_۱ + r_۲)} = \frac{۶}{۶} = ۱A$$

بنابراین توان ورودی به باتری (۲) برابر است با:

$$P(۲)\ \text{ورودی مولد} = \varepsilon_۲ I + r_۲ I^۲$$

$$\xrightarrow[r_۲ = ۲\Omega\ ,\ I = ۱A]{\varepsilon_۲ = ۶V} P(۲)\ \text{ورودی مولد} = ۶ \times ۱ + ۲ \times ۱^۲ = ۸W$$

۹- با توجّه به حداکثر توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها، ابتدا باید حساب کنیم حداکثر جریان عبوری از مقاومت‌ها چقدر می‌تواند باشد:

$$P_{max} = RI_{max}^۲ \Rightarrow \begin{cases} (P_۱)_{max} = R_۱ \times (I_{max})_۱^۲ \Rightarrow ۲۷ = ۳ \times (I_{max})_۱^۲ \Rightarrow (I_{max})_۱ = ۳A \\ (P_۲)_{max} = R_۲ \times (I_{max})_۲^۲ \Rightarrow ۲۴ = ۶ \times (I_{max})_۲^۲ \Rightarrow (I_{max})_۲ = ۲A \end{cases}$$

از آن‌جایی که در مقاومت‌های موازی نسبت جریان برابر با نسبت عکس مقاومت‌ها است پس اگر فرض کنیم که جریان بیشینه از مقاومت $R_۱$ عبور می‌کند، چون $R_۲ = ۲R_۱$ است پس $I_۲ = \frac{۳}{۲}A$ شده و در این صورت هیچ یک از مقاومت‌ها آسیب نمی‌بینند. امّا اگر فرض کنیم جریان بیشینه از مقاومت $R_۲$ عبور می‌کند، پس باید $I_۱ = ۴A$ باشد که در این صورت $I_۱ > (I_{max})_۱$ می‌شود و حتماً مقاومت $R_۱$ آسیب می‌بیند. بنابراین جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = (I_{max})_۱ + I_۲ = ۳ + \frac{۳}{۲} = ۴/۵A$$

چون $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ است پس اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B زمانی بیشینه است که جریان از B به سمت A باشد.

$$V_B + \varepsilon_۲ - I\left(\frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲}\right) - \varepsilon_۱ = V_A \Rightarrow V_B + ۸ - ۴/۵ \times ۲ - ۱۰ = V_A \Rightarrow V_B - V_A = ۱۱V$$