

هندسه (۲)

دبیرستان روزبه ۲

موضوع: پاسخ تشریحی روابط طولی در مثلث

نام:

اردوی نوروزی ۱۳۹۹

پایه یازدهم / ۳

نام خانوادگی:

۱- با توجه به قضیه میانه‌ها می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} m_a^2 &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + c^2) - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{4} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

۲- می‌دانیم $r = \frac{s}{p}$ و $r_a = \frac{s}{p-a}$

$$r \cdot r_a = \frac{s^2}{p(p-a)} \xrightarrow{\text{هرون}} r \cdot r_a = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

$$r \cdot r_a = (p-b)(p-c)$$

۳- در رابطه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2P}{\sin A + \sin B + \sin C} \xrightarrow{\text{می‌دانیم}}$$

$$\frac{a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{2P}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \rightarrow a = \frac{P \cdot \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

۴- طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} \rightarrow b^2 - c^2 = ab \cos C - ac \cos B = a(b \cos C - c \cos B)$$

$$\rightarrow b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

۵- نیم‌خطی از رأس C رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند به طوری که $\hat{ACB} = \hat{ACD}$ در این صورت $AC = CD = BD = b$ و در نتیجه $AD = b - c$ (مثلث BCD و ACD متساوی‌الساقین‌اند)

طبق قضیه نیمساز داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{b-c}{c} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

