

حسابان

نام:

موضوع: پاسخ تشریحی تابع (سری دوم)

دبیرستان روزبه ۲

نام خانوادگی:

اردوی نوروزی ۱۳۹۹

پایه یازدهم / ۴

۱- ابتدا ضابطه تابع را به صورت $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ می‌نویسیم. اکنون داریم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (\sqrt{x_1} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = (\sqrt{x_2} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow (\sqrt{x_1} + \frac{1}{2})^2 = (\sqrt{x_2} + \frac{1}{2})^2$$

چون $\sqrt{x_1} + \frac{1}{2}$ و $\sqrt{x_2} + \frac{1}{2}$ مقادیر مثبتی هستند، پس:

$$\sqrt{x_1} + \frac{1}{2} = \sqrt{x_2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

۲- چون تابع f یک به یک است (سؤال قبل)، داریم:

$$f(f(x)) = f(x+2) \Rightarrow f(x) = x+2 \Rightarrow x + \sqrt{x} = x+2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

-۳

$$y = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 y^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow x = \pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

از ضابطه تابع اول پیداست که x و y مختلف‌العلامه هستند.

$$\Rightarrow x = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

۴- فرض کنیم $g(x) = f(1-x)$ و $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. بنابراین:

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\}$$

از آنجا که $D_f = [0, 2]$ ، برای به دست آوردن D_g داریم:

$$0 \leq 1-x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

بنابراین $D_f \cap D_g = [0, 1]$. از طرفی جواب‌های معادله $f(x) = 0$ عبارتند از $x = 0$ و $x = 2$. بنابراین:

$$D_h = [0, 1] - \{0, 2\} = (0, 1]$$

$$y = x^2 - 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 3 \Rightarrow (x-1)^2 = y-3 \Rightarrow x-1 = \sqrt{y-3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-3} \Rightarrow f^{-1}(3x+2) = 1 + \sqrt{3x-1}$$

برای محاسبه $(f(3x+2))^{-1}$ با در نظر گرفتن $g(x) = 3x+2$ و $h(x) = (f \circ g)(x)$ ، ضابطه $h^{-1}(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$h^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$g \text{ معکوس تابع } g: y = 3x+2 \Rightarrow 3x = y-2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

$$(f(3x+2))^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(1 + \sqrt{x-3}) = \frac{\sqrt{x-3}-1}{3}$$

۶- از $(f \circ g^{-1})(x) = 1-3x$ نتیجه می‌شود $f(g^{-1}(x)) = 1-3x$ از طرفی داریم:

$$f(x) = \frac{2x-5}{3} \Rightarrow f(g^{-1}(x)) = \frac{2g^{-1}(x)-5}{3}$$

بنابراین:

$$\frac{2g^{-1}(x)-5}{3} = 1-3x \Rightarrow 2g^{-1}(x)-5 = 3-9x \Rightarrow g^{-1}(x) = 4 - \frac{9}{2}x \Rightarrow g(4 - \frac{9}{2}x) = x$$

در تساوی اخیر قرار می‌دهیم $x = \frac{2}{3}$ که نتیجه می‌شود $g(1) = \frac{2}{3}$.

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 > 2 \Rightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ یا } x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \leq 2x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2x^2 + 1 < 1 \Rightarrow x^2 < 0 \text{ غیرممکن} \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow g(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - |x| > 2 \Rightarrow |x| < -1 \text{ غیرممکن} \\ 1 \leq 1 - |x| \leq 2 \Rightarrow -1 \leq |x| \leq 0 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \\ 1 - |x| < 1 \Rightarrow |x| > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 2(2x^2 + 1) - 1 & x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3(2x^2 + 1) & 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5 - (1 - |x|) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 6x^2 + 3 & 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4 - x & x < 0 \end{cases}$$