# حسابان

نام:

نام خانوادگی:

**موضوع: پاسخ تشریحی مثلثات (سری دوم)**

پایه یازدهم/ ۷

دبیرستان روزبه ۲

اردوی نوروزی ۱۳۹۹

-۱

$$P\sin x=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\cos 8x\cos 16x$$

$$=\frac{1}{8}\sin 8x\cos 8x\cos 16x$$

$$=\frac{1}{16}\sin 16x\cos 16x=\frac{1}{32}\sin 32x$$

$$x=\frac{\pi}{96}\Rightarrow P=\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{64}$$

-۲ الف)

$$(\cos 75^\circ-\frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ-\frac{1}{\cos 75^\circ})=(\frac{\cos 75^\circ\sin 75^\circ-1}{\sin 75^\circ})(\frac{\sin 75^\circ\cos 75^\circ-1}{\cos 75^\circ})$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}\sin 150^\circ-1)(\frac{1}{2}\sin 150^\circ-1)}{\sin 75^\circ\cos 75^\circ}=\frac{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-1)}{\frac{1}{2}\sin 150^\circ}=\frac{(-\frac{3}{4})(-\frac{3}{4})}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{9}{4}$$

ب)

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{8}\qquad \cos\frac{5\pi}{8}=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8})=-\sin\frac{\pi}{8}\qquad \cos\frac{7\pi}{8}=\cos(\pi-\frac{\pi}{8})=-\cos\frac{\pi}{8}$$

$$(1+\cos\frac{\pi}{8})(1+\cos\frac{3\pi}{8})(1+\cos\frac{5\pi}{8})(1+\cos\frac{7\pi}{8})=(1+\cos\frac{\pi}{8})(1+\sin\frac{\pi}{8})(1-\sin\frac{\pi}{8})(1-\cos\frac{\pi}{8})$$

$$=(1-\cos^2\frac{\pi}{8})(1-\sin^2\frac{\pi}{8})=1-(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8})+\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

-۳ می‌دانیم که $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ و $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$، پس:

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\times\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

$$f(\frac{\pi}{24})=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

۴- در رابطه $\frac{۱-\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x}=\cos ۲x$ قرار می‌دهیم $x=\frac{\pi}{۴}-\alpha$. داریم:

$$\frac{۱-\tan^{۲}(\frac{\pi}{۴}-\alpha)}{۱+\tan^{۲}(\frac{\pi}{۴}+\alpha)}=\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\cos(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha)=\sin ۲\alpha$$

$$\frac{\pi}{۶}\le\alpha\le\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{\pi}{۳}\le ۲\alpha\le\frac{۲\pi}{۳}\xrightarrow{\text{با توجه به دایره مثلثاتی}}\frac{\sqrt{۳}}{۲}\le\sin ۲\alpha\le ۱$$

پس بیشترین مقدار عبارت داده شده برابر ۱ است.

۵-

$$\frac{۱}{\sin^{۲} x}+\frac{۱}{\cos^{۲} x}+\frac{۱}{\tan^{۲} x}+\frac{۱}{\cot^{۲} x}=۷\Rightarrow\frac{۱}{\sin^{۲} x}+\frac{۱}{\cos^{۲} x}+\frac{\cos^{۲} x}{\sin^{۲} x}+\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}=۷$$

$$\Rightarrow\frac{\cos^{۲} x+\sin^{۲} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}+\frac{\cos^{۴} x+\sin^{۴} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}=۷\Rightarrow\frac{۱}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}+\frac{(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)^{۲}-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}=۷$$

$$\Rightarrow\frac{۱+۱-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}=۷\Rightarrow ۲-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x=۷\sin^{۲} x\cos^{۲} x\Rightarrow\sin^{۲} x\cos^{۲} x=\frac{۲}{۹}$$

$$\Rightarrow ۴\sin^{۲} x\cos^{۲} x=\frac{۸}{۹}\Rightarrow\sin^{۲} ۲x=\frac{۸}{۹}$$