حسابان

نام:

نام خانوادگی:

موضوع: پاسخ تشریحی جبر و معادله (سری اوّل)

پایه یازدهم/ ۱

دبیرستان روزبه ۲

اردوی نوروزی ۱۳۹۹

-۱

$$a_1+3d\ ,\ a_1+6d\ ,\ a_1+12d$$

$$a_1+6d=t \to t-3d\ ,\ t\ ,\ t+6d$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (t-3d)(t+6d)=t^2 \to t^2+3td-18d^2=t^2 \to 3td=18d^2 \to \begin{cases} d=0 & (I) \\ 6d=t & (II) \end{cases}$$

$$(I) \to q=1$$

$$(II) \to q=\frac{t+6d}{t}=\frac{6d+6d}{6d}=2 \to q=2$$

-۲

$$\left.\begin{array}{ll} a_1=x & \text{دنباله هندسی با جمله اول} \\ q=x & \text{و قدر نسبت} \\ n=9 & \text{و تعداد جملات} \end{array}\right\} \Rightarrow x+x^2+\dots+x^9=x\frac{1-x^9}{1-x}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_1=x & \text{دنباله هندسی با جمله اول} \\ q=-x & \text{و قدر نسبت} \\ n=9 & \text{و تعداد جملات} \end{array}\right\} \Rightarrow x-x^2+x^3+\dots+x^9=x\frac{1-(-x)^9}{1-(-x)}=x\frac{1+x^9}{1+x}$$

$$A=x\frac{1-x^9}{1-x}\times x\frac{1+x^9}{1+x}=x^2\frac{1-x^{18}}{1-x^2}\xrightarrow{x=\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2\times\frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2}=2\times\frac{1-2^9}{1-2}=2\times\frac{-511}{-1}=1022$$

نکته درسی: مجموع n جمله نخست تصاعد هندسی با جمله‌ی اوّل a_1 و قدر نسبت q برابر است با:

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\dots+a_1q^{n-1}=a_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$$

-۳ نکته: در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها عبارتند از:

$$S=x'+x''=\frac{-b}{a} \qquad P=x'.x''=\frac{c}{a}$$

$$\begin{cases} x'+x''=\dfrac{2(m-2)}{m} \\ x'.x''=\dfrac{m-3}{m} \end{cases} \Rightarrow 4(x'+x'')=7x'.x'' \Rightarrow 4\times\frac{2(m-2)}{m}=7\times\frac{m-3}{m} \Rightarrow 8m-16=7m-21 \Rightarrow m=-5$$

۴-

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3 \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$$

$$\frac{\alpha+2\beta}{\alpha^3}+\frac{\beta+2\alpha}{\beta^3}=\frac{2\alpha^4+2\beta^4+\alpha\beta^3+\alpha^3\beta}{\alpha^3\beta^3}=\frac{2(\alpha^4+\beta^4)+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^3\beta^3}$$

$$=\frac{2((\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2)+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^3\beta^3}=\frac{2((S^2-2P)^2-2P^2)+P(S^2-2P)}{P^3}$$

$$=\frac{2((3^2-2\times1)^2-2\times1^2)+1\times(3^2-2\times1)}{1^3}=101$$

۵-

$$\alpha=\beta^2\xrightarrow{\times\beta}\beta^3=\alpha\beta\xrightarrow{\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k}{4}}\beta^3=\frac{k}{4}\Rightarrow k=4\beta^3 \quad (1)$$

$$\alpha=\beta^2\xrightarrow{+\beta}\beta^2+\beta=\alpha+\beta\Rightarrow\beta^2+\beta=\frac{15}{4}\Rightarrow4\beta^2+4\beta-15=0 \qquad \Delta=16+240=256$$

$$\beta=\frac{-4+16}{8}=\frac{3}{2}\ (2) \qquad \beta=\frac{-4-16}{8}=-\frac{5}{2}\ (3)$$

$$(1),(2)\Rightarrow k=4(\frac{3}{2})^3\Rightarrow k=\frac{27}{2}$$

$$(1),(3)\Rightarrow k=4(\frac{-5}{2})^3\Rightarrow k=\frac{-125}{2}$$

۶- اگر فرض کنیم $x-\frac{1}{x}=t$ آن‌گاه داریم:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=t^2+2$$

و معادله به صورت $t^2+2+5t=8$ در می‌آید. بنابراین:

$$t^2+5t-6=0\Rightarrow t=1\ ,\ t=-6$$

$$x-\frac{1}{x}=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad x-\frac{1}{x}=-6\Rightarrow x^2+6x-1=0\Rightarrow x=-3\pm\sqrt{10}$$

۷- ابتدا توجه می‌کنیم که باید $x\geq0$ باشد. اکنون معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{\sqrt[5]{x^6}}-\sqrt[5]{\sqrt{x^3}}=56\Rightarrow(\sqrt[10]{x})^6-(\sqrt[10]{x})^3=56$$

فرض می‌کنیم $t=(\sqrt[10]{x})^3$. معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$t^2-t-56=0\Rightarrow(t-8)(t+7)=0\Rightarrow\begin{cases}t=-7 & \text{غ ق ق}\\ t=8\Rightarrow x=\sqrt[3]{8^{10}}=2^{10}=1024\end{cases}$$